國立基隆高中　110學年度第一學期　高二數學A晨間演練　110/12/29

範圍：翰林版 3-2 平面向量的內積　　班級：＿＿＿姓名：＿＿＿＿座號：＿＿＿

1. 設 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 60°，則：

（1）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$＿＿＿＿。（2）$|3\vec{a}-\vec{b}|=$＿＿＿＿＿。

Sol: （1）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=1-4=-3$

（2）$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=9-6\cdot1\cdot2\cdot\cos60^\circ+4=7$

$\Rightarrow|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

2. 已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{13}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為＿＿＿＿。

Sol: $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+4\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta+16=13$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{-1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$

3. 一單位圓內接$\triangle ABC$，若 O 為單位圓之圓心，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則：

（1）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$＿＿＿＿。　（2）$\overline{AB}=$＿＿＿＿。

Sol: （1）$\because\triangle ABC$ 內接於圓 O　$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$（半徑）

又 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=-\sqrt{3}\overrightarrow{OC}$

$\therefore|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|-\sqrt{3}\overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=3|\overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3-1-4\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{-1}{2}$

（2）$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　$\therefore|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$=1-2\times\frac{-1}{2}+1=3$　$\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{3}$

4. 設 x，y 均為實數，若 $3x+4y=5$，則（1）x^2+y^2 之最小值為＿＿＿＿，

（2）此時數對 $(x,y)=$＿＿＿＿＿。

Sol: 由柯西不等式知 $(x^2+y^2)(3^2+4^2)\geq(3x+4y)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2\geq(5)^2/(3^2+4^2)=5$ 為最小值

此時 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=k$ 代入 $3x+4y=5\Rightarrow9k+16k=5\Rightarrow k=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow(x,y)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

5. 已知 $O(1,1)$，$A(7,-1)$，$B(3,5)$為△OAB 之三頂點，試求

（1）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_____。（2）$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的正射影為_____。

Sol:（1）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(6,-2)\cdot(2,4)=12-8=4$

（2）∵ $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的正射影為 $\left(\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{|\overline{OB}|^2}\right)\overrightarrow{OB}=\left(\frac{4}{2^2+4^2}\right)\cdot(2,4)=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$

6.給定 $\overrightarrow{a}=(-2,3)$，$\overrightarrow{b}=(6,4)$，$\overrightarrow{c}=(1,x)$，若 $\overrightarrow{c}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 角平分線的方向向量，則 $x=$_____。

Sol: 已知 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{13}$，$|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{13}$，

∴角平分線的方向向量為 $k(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=k(2,10)=(1,x)$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow x=5$

7.試將向量 $\overrightarrow{a}=(7,4)$ 分解為(1)與 $\overrightarrow{b}=(1,2)$ 平行分量_____。

(2)與 $\overrightarrow{b}=(1,2)$ 垂直之分量_____。

Sol:（1） $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向上的正射影為 $\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}=\frac{7+8}{5}(1,2)=(3,6)$

（2）$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(4,-2)$

請將答案填入下列表格中

1(1)	1(2)	2	3(1)	3(2)	4(1)
−3	$\sqrt{7}$	**120°**	$\frac{-1}{2}$	$\sqrt{3}$	**5**
4(2)	**5(1)**	**5(2)**	**6**	**7(1)**	**7(2)**
$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$	**4**	$\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$	**5**	**(3，6)**	**(4，−2)**